

## SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

1. În fiecare caz de mai jos, stabiliți care dintre vectori sunt ortogonali (perpendiculari) ținând cont de faptul că produsul scalar din spațiul  $\mathbb{R}^n$  corespunzător este înfestrat (prevăzut) cu produsul scalar canonic (standard, uzual):

(a)  $\vec{u} = (-1, 2, 4)$ ,  $\vec{v} = (2, 3, -1)$  în  $\mathbb{R}^3$ ;

(b)  $\vec{u} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v} = (-1, -1, -1)$  în  $\mathbb{R}^3$ ;

(c)  $\vec{u} = (a, b, c)$ ,  $\vec{v} = (0, 0, 0)$  în  $\mathbb{R}^3$ ;

(d)  $\vec{u} = (-2, 3, -5, 1)$ ,  $\vec{v} = (2, 1, -2, -9)$  în  $\mathbb{R}^4$ ;

(e)  $\vec{u} = (0, -1, 2, 5)$ ,  $\vec{v} = (2, -1, 2, 9)$  în  $\mathbb{R}^4$ ;

(f)  $\vec{u} = (a, b)$ ,  $\vec{v} = (-b, a)$  în  $\mathbb{R}^2$ .

Indicație. Fiecare dintre vectori este exprimat în baza canonică (standard, uzuală) din  $\mathbb{R}^n$ -ul corespunzător. Dacă  $\vec{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  și  $\vec{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  sunt doi vectori arbitrari din  $\mathbb{R}^n$ , atunci se știe că produsul scalar canonic este  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ . Doi vectori sunt ortogonali dacă  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ . Scriem  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

Răspuns. (a) Da; (b) Nu, vectorii dați sunt coliniari, chiar unul opus celuilalt, adică  $\vec{v} = -\vec{u}$  și deci  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{u} = -\|\vec{u}\|^2 = -(1+1+1) = -3 \neq 0$ ;  
(c) Da, vectorul nul este perpendicular pe orice vector din acel spațiu; (d) Da; (e) Nu; (f) Da, se poate spune că  $\vec{v}$  se obține din  $\vec{u}$  printr-o rotație de  $90^\circ$ .

## SPATII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

2. Fie că spațiile vectoriale reale  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  și  $\mathbb{R}^4$  sunt prevăzute cu produsul scalar canonic (numit încă și Euclidian). În fiecare din cazurile de mai jos, găsiți unghiul dintre vectorii  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$ :

- (a)  $\vec{u} = (1, -3)$ ,  $\vec{v} = (2, 4)$  în  $\mathbb{R}^2$ ; (b)  $\vec{u} = (-1, 0)$ ,  $\vec{v} = (3, 8)$  în  $\mathbb{R}^2$ ;  
(c)  $\vec{u} = (-1, 5, 2)$ ,  $\vec{v} = (2, 4, -9)$ ; (d)  $\vec{u} = (4, 1, 8)$ ,  $\vec{v} = (1, 0, -3)$  în  $\mathbb{R}^3$ ;  
(e)  $\vec{u} = (1, 0, 1, 0)$ ,  $\vec{v} = (-3, -3, -3, -3)$ ; (f)  $\vec{u} = (2, 1, 7, 1)$ ,  $\vec{v} = (4, 0, 0, 0)$  în  $\mathbb{R}^4$ .

Indicație. Dacă  $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v})$ , atunci se știe că  $\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$  (desigur, cu condiția ca ambii vectori să fie nenuli).

Răspuns. (a)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  (cât este unghiul  $\varphi$ ?); (b)  $-\frac{3}{\sqrt{73}}$  (ce se poate spune despre unghiul dintre cei doi vectori?);  
(c) 0 (cum sunt vectorii  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$ ?); (d)  $-\frac{20}{9\sqrt{10}}$ ;  
(e)  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  (cât este  $\varphi$ ?); (f)  $\frac{2}{\sqrt{55}}$ .

3. În spațiul vectorial real al tuturor polinoamelor de grad cel mult 2, având coeficienți numere reale, notat  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , să se găsească unghiul dintre polinoamele  $p$  și  $q$ :

- (a)  $p = -1 + 5x + 2x^2$ ,  $q = 2 + 4x - 9x^2$ ;  
(b)  $p = x - x^2$ ,  $q = 7 + 3x + 3x^2$ .

Indicație. Tineți cont că  $\dim \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = 3$ , iar "baza canonică" în  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  este mulțimea de polinoame  $B = \{1, x, x^2\}$ . Repetați atunci că  $p = (-1, 5, 2)$ ,  $q = (2, 4, -9)$  și similar pt (b). Atunci  $p \cdot q = -2 + 20 - 18 = 0$  deci  $p$  și  $q$  de la (a) sunt ortogonale. (b) La fel,  $p \perp q$ .

## SPATII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

4. În spațiul liniar real al matricelor pătratică de ordinul al doilea, cu elementele numere reale, notat cu  $M_2(\mathbb{R})$ , produsul scalar "canonic" al matricelor  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  este  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T \cdot B)$ , unde "tr" înseamnă urma matricei dintre paranteze, adică suma elementelor de pe diagonala principală (vezi notițe curs).

Să se găsească cosinusul unghiului dintre matricele  $A$  și  $B$  în fiecare din cazurile de mai jos:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Răspuns. (a)  $\frac{19}{10\sqrt{7}}$ ; (b) 0 (ce se poate spune despre matricele  $A$  și  $B$ ?)

5. Pentru ce valori ale lui  $k \in \mathbb{R}$  vectorii  $\vec{u}$  și  $\vec{v}$  sunt ortogonali?

$$(a) \quad \vec{u} = (2, 1, 3), \quad \vec{v} = (1, 7, k)$$

$$(b) \quad \vec{u} = (k, k, 1), \quad \vec{v} = (k, 5, 6)$$

Răspuns. (a)  $k = -3$ ;

$$(b) \quad k \in \{-3, -2\}.$$

## SPATII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

6. Fie spatiul Euclidian  $\mathbb{R}^4$ . Să se găsească vectorii de normă 1 (deci versori) ortogonali vectorilor  $\vec{u} = (2, 1, -4, 0)$ ,  $\vec{v} = (-1, -1, 2, 2)$  și  $\vec{w} = (3, 2, 5, 4)$ .

Indicație. Notăm cu  $\vec{x}$  un astfel de vector (versor). Fiind din  $\mathbb{R}^4$  și versor pe deasupra, rezultă că  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  unde  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$  (din cauză că are norma unitate). Se impun încă condițiile:  $\vec{x} \perp \vec{u}$ ;  $\vec{x} \perp \vec{v}$ ;  $\vec{x} \perp \vec{w}$ . Se găsește în final un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , dar neliniar. Se rezolvă acest sistem de gradul al doilea.

Răspuns.  $\vec{x} = \pm \frac{1}{57}(-34, 44, -6, 11)$ .

7. Într-un spatiu Euclidian are loc inegalitatea Cauchy-Schwarz-Buniakovski  
 $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$  (egalitatea având loc dacă și numai dacă vectorii sunt coliniari (liniar dependenți) (vezi notițele Analiză matematică sem I)).

Verificați de fiecare dată inegalitatea pentru vectorii

(a)  $\vec{u} = (2, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, -3)$  în  $\mathbb{R}^2$ ;

(b)  $\vec{u} = (3, -1, 2)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, -3)$  } în  $\mathbb{R}^3$ ;

(c)  $\vec{u} = (1, 2, -4)$ ,  $\vec{v} = (-2, -4, 8)$  } în  $\mathbb{R}^3$ ;

(d)  $\vec{u} = (1, 1, -1, -1)$ ,  $\vec{v} = (1, 2, -2, 0)$  în  $\mathbb{R}^4$ .

Indicație. Produsul scalar este cel canonic, standard

## SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

8 Baze ortogonale; baze ortonormate;  
procedeele de ortonormare Gram-Schmidt

8.1 Demonstrați că sistemul de vectori  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ , unde  $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $\vec{v}_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ , are proprietatea că oricare doi din vectorii săi sunt ortogonali iar mărimea oricărui dintre vectorii este 1.

Ță se scrie matricea  $C$  de trecere de la baza canonică  $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$  la sistemul de vectori  $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  și să se arate că  $B'$  este bază. Cum se numește baza ai căror vectori sunt ortogonali doi câte doi și oricare dintre vectori are lungimea 1?

Ță se verifice că matricea  $C$  are proprietatea (\*)  $CC^T = C^T C = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Cum se numește matricea  $C$ ?

Cunoașteți și o altă matrice cu proprietatea (\*)?

Cu cât este egal determinantul unei astfel de matrice?

8.2 Fie spațiul euclidian real  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  și  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  o bază a lui  $V$ . Să se demonstreze că  $\forall \vec{u} \in V$  se scrie unic ca  $\vec{u} = \langle \vec{u}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{u}, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 + \dots + \langle \vec{u}, \vec{v}_n \rangle \vec{v}_n$ .

## SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

8.3 Se consideră sistemul de vectori  $B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ , unde  $\vec{f}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{f}_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{f}_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ , vectorii fiind dați în baza canonică din  $\mathbb{R}^3$   
 $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ .

Să se arate că  $B'$  este bază în  $\mathbb{R}^3$ .

Porcind de la baza  $B'$  să se determine baza ortonormată  $B'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  folosind procedeul de ortonormare Gram-Schmidt.

Să se scrie matricea  $C$  de trecere de la baza  $B$  la baza  $B''$ .

Cum este baza  $B$ ? Dar matricea  $C$ ?

Cu ce matrice se face trecerea de la baza  $B''$  la baza  $B$ ?

Indicație. Văzi exercițiul 5 din TEMA NR. 3

Răspuns.

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \vec{u}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\ \vec{u}_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{cases}$$

8.4 Arătați că  $B' = \{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$ , unde  $\vec{e}_1' = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ,  $\vec{e}_2' = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ,  $\vec{e}_3' = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$  este o bază ortonormată în  $\mathbb{R}^3$ . Găsiți matricea de trecere  $C$  de la baza ortonormată  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  la baza  $B'$ . Ce proprietate are  $C$ ?

## SPATII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

8.5 Descompuneti vectorul  $\vec{x} = (0, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$  după elementele bazei (să se arate că este bază)  $B' = \{ \vec{f}_1 = (1, 0, 1), \vec{f}_2 = (0, 1, -1), \vec{f}_3 = (-1, 1, 1) \}$  și apoi orthonormati baza respectivă.

Rezolvare. Fie  $C$  matricea de trecere de la baza canonică  $B = \{ \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \}$  la sistemul  $B'$  de vectori. Avem schema  $B \xrightarrow{C} B'$ , unde știm că elementele coloanelor matricei  $C \in M_3(\mathbb{R})$  sunt coordonatele vectorilor  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$  în  $B$ .

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se știe de asemenea că  $B'$  este bază dacă și numai dacă  $C$  este matrice inversabilă. O matrice este inversabilă dacă determinantul ei este nenul. Avem

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

deci  $\exists C^{-1}$  ceea ce arată că  $B'$  este bază.

Dacă notăm  $X'$  matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\vec{x}$  în baza  $B'$ , atunci se știe (vezi notițe curs) că  $X' = C^{-1}X$ , unde  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  este matricea coloană a coordonatelor vectorului  $\vec{x}$  în baza canonică  $B$ .



## SPATII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

Pentru a afla inversa  $C^{-1}$  aplicăm metoda transformărilor elementare aplicate liniilor matricei formată din 2 blocuri, în stânga fiind  $C$ , iar în dreapta  $I_3$  matricea unitate.

$$(C \mid I_3).$$

Oprim metoda când ajungem în fața

$$(I_3 \mid B)$$

Se dovedește prin calcul că  $B = C^{-1}$ .

Transformările elementare aplicate liniilor unei matrice pătratice sunt:

- $(T_1)$  înmulțirea liniei "i" prin factorul  $c \neq 0$ ;
- $(T_2)$  Schimbarea între ele a liniilor  $i$  și  $j$ ;
- $(T_3)$  adunarea la elementele liniei  $i$  a elementelor liniei  $j$ , înmulțite în prealabil cu un factor  $c \neq 0$ .

Dacă notăm liniile cu  $L_1, L_2, \dots, L_n$  și cele obținute după aplicarea transformărilor cu  $L'_1, L'_2, \dots, L'_n$ , atunci  $(T_1), (T_2)$  și  $(T_3)$  se pot scrie în forma:

$$(T_1) \quad L'_i = c L_i;$$

$$(T_2) \quad L'_i = L_j \text{ și } L'_j = L_i$$

$$(T_3) \quad L'_i = L_i + c L_j.$$



# SPATII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L'_3 = L_3 + (-1)L_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{L'_3 = L_2 + L_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L'_3 = \frac{1}{3}L_3}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{L'_1 = L_1 + 1 \cdot L_3}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{L'_2 = L_2 + (-1) \cdot L_3}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare!

$$C^{-1}C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \quad \text{Q.E.D.}$$

SPATII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

$$C^{-1}X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Deci } \vec{x} = (\vec{f}_1 \ \vec{f}_2 \ \vec{f}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 \text{ sau}$$

$$\vec{x} = (1, 1, 1)_{B'}$$

Pentru ultima parte a problemei aplicăm procedul de ortonormare Gram-Schmidt. De la sistemul de vectori  $B'_3 \{ \vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3 \}$  trecem la vectorii  $\{ \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3 \}$  prin

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = \vec{f}_1 \\ \vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \alpha_{21} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_3 = \vec{f}_3 - \alpha_{31} \vec{g}_1 - \alpha_{32} \vec{g}_2, \end{cases}$$

care dorim să fie ortogonali doi câte doi. Din condiția  $\vec{g}_2 \perp \vec{g}_1$  găsim  $\alpha_{21} = \frac{\vec{f}_2 \cdot \vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|^2} = -\frac{1}{2}$ .

Prin urmare  $\vec{g}_2 = \vec{f}_2 + \frac{1}{2} \vec{f}_1 = (\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$ .

Norma lui  $\vec{g}_2$  este  $\|\vec{g}_2\| = \sqrt{\vec{f}_2 \cdot \vec{g}_2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Impunând condițiile  $\vec{g}_3 \perp \vec{g}_1$  și  $\vec{g}_3 \perp \vec{g}_2$ , găsim

$$\alpha_{31} = \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|^2} = 0;$$

$$\alpha_{32} = \frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|^2} = 0.$$

Prin urmare  $\vec{g}_3 = \vec{f}_3$ , iar norma lui  $\vec{g}_3$  este  $\|\vec{g}_3\| = \sqrt{3}$ .

## SPATII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

De la sistemul de vectori ortogonali doi câte doi  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$  trecem la sistemul orthonormat  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ , unde

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|}, \quad \vec{u}_2 = \frac{\vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|}, \quad \vec{u}_3 = \frac{\vec{g}_3}{\|\vec{g}_3\|} \Rightarrow$$

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\sqrt{2}}, \quad \vec{u}_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \vec{g}_2, \quad \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{g}_3 \Rightarrow$$

$$\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \vec{u}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad \vec{u}_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Sistemul de vectori  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ , ortogonali doi câte doi, este baza orthonormată dorită.

Fie  $B \xrightarrow{C} \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ ,

unde  $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$  este baza canonică din  $\mathbb{R}^3$ . Atunci

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow C \cdot C^T = C^T \cdot C = I_3$$

Sau, altfel spus, suma pătratelor elementelor de pe orice linie (căpșană) a matricei  $C$  este 1, iar suma produselor elementelor corespunzătoare de pe două linii (coloane) diferite este zero. Avem că  $\det C = 1$ , deci baza  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  este la fel orientată ca și baza canonică  $B$ .

## SPAȚII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

8.6 Folosind procedeul Gram-Schmidt

să se ortonormeze vectorii linear independenți

$$\vec{f}_1 = (1, -2, 2), \quad \vec{f}_2 = (-1, 0, -1), \quad \vec{f}_3 = (5, -3, -7).$$

În baza  $B' = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$  vectorul  $\vec{x}$  are coordonatele  $\vec{x}' = (1, 1, 1)_{B'}$ . Ce coordonate are  $\vec{x}$  în baza canonică  $B = \{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$ ?

Rezolvare.  $B'$  este într-adevăr bază în  $\mathbb{R}^3$  pentru că matricea de trecere de la  $B$  la  $B'$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

este neregulară deoarece  $\det C = 27 \neq 0$ .

Determinăm sistemul de vectori  $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ , ortonogonali doi câte doi, dati de:

$$\vec{g}_1 = \vec{f}_1; \quad \vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \alpha_{21} \vec{g}_1; \quad \vec{g}_3 = \vec{f}_3 - \alpha_{31} \vec{g}_1 - \alpha_{32} \vec{g}_2.$$

Se găsește:  $\alpha_{21} = -\frac{1}{3}$ ;  $\alpha_{31} = -\frac{1}{3}$ ;  $\alpha_{32} = 1$ . Deci:

$$\vec{g}_1 = (1, -2, 2); \quad \vec{g}_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right); \quad \vec{g}_3 = (6, -3, -6)$$

Normele acestor vectori sunt:

$$\|\vec{g}_1\| = 3; \quad \|\vec{g}_2\| = 1; \quad \|\vec{g}_3\| = 9$$

Sistemul de vectori  $\vec{u}_1 = \frac{\vec{g}_1}{\|\vec{g}_1\|}$ ,  $\vec{u}_2 = \frac{\vec{g}_2}{\|\vec{g}_2\|}$ ,  $\vec{u}_3 = \frac{\vec{g}_3}{\|\vec{g}_3\|}$

este ortonormat, iar baza  $B'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

este ortonormată. Avem:  $\vec{u}_1 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ,

$$\vec{u}_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \quad \vec{u}_3 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

Matricea  $Q$ , de trecere de la baza  $B$  la

# SPATII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

baza  $B''$  este

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Trecerea de la baza  $B'$  la baza  $B$  se face cu matricea  $C^{-1}$ . In legea de schimbare a coordonatelor unui vector apare inversa matricei de trecere. Deoarece  $(C^{-1})^{-1} = C$  rezultă că legătura între coordonate va fi:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Prin urmare  $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3 =$   
 $= 5 \vec{e}_1 - 5 \vec{e}_2 - 6 \vec{e}_3 = (5, -5, -6).$

8.7 Să se orthonormeze baza

$$B' = \{ \vec{f}_1 = (1, 1, -1), \vec{f}_2 = (1, -1, 1), \vec{f}_3 = (0, 1, 1) \}$$

din  $\mathbb{R}^3$ . Se cer apoi coordonatele vectorului  $\vec{x} = (1, 1, 2)$  în baza canonică  $B = \{ \vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1) \}.$

Răspuns.  $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, 1), \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2, -1, 1), \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, -1)$   
 $\vec{x} = (2, 2, 2) = 2 \vec{e}_1 + 2 \vec{e}_2 + 2 \vec{e}_3.$

SPATII EUCLIDIENE (CONTINUARE)

9. Arătați că punctele  $A(2, -1, 1)$ ,  $B(3, 2, -1)$  și  $C(7, 0, -2)$  sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic. În care dintre vârfuri este unghiul de  $90^\circ$ ?

Rezolvare. Vectorii de poziție ai celor trei vârfuri sunt  $\vec{r}_A = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{r}_B = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

$$\vec{r}_C = 7\vec{e}_1 - 2\vec{e}_3$$

Vectorii  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  și  $\vec{BC}$  se exprimă cu ajutorul vectorilor de poziție de mai sus după cum urmează

$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (1, 3, -2)$$

$$\vec{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = 5\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 = (5, 1, -3)$$

$$\vec{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (4, -2, -1)$$

Se observă că produsul scalar al vectorilor  $\vec{AB}$  și  $\vec{BC}$  este nul, deci  $\vec{AB} \perp \vec{BC}$ . Triunghiul  $ABC$  este dreptunghic și are unghiul drept în punctul  $B$ . Se poate verifica aceasta și cu teorema lui Pitagora. Pentru aceasta trebuie calculate lungimile laturilor triunghiului, deci normele vectorilor  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  și  $\vec{BC}$ . Avem  $\|\vec{AB}\| = c = \sqrt{14}$ ,  $\|\vec{AC}\| = b = \sqrt{35}$ ,  $\|\vec{BC}\| = \sqrt{21} = a$ . Se vede că  $c^2 + a^2 = b^2$ , deci  $\vec{AB}$  și  $\vec{BC}$  sunt catete.